



## Opérateur DtN pour les guides cylindriques à paroi traitée en présence d'un écoulement uniforme

Boureima Ouedraogo, Emmanuel Redon, Jean-François Mercier

### ► To cite this version:

Boureima Ouedraogo, Emmanuel Redon, Jean-François Mercier. Opérateur DtN pour les guides cylindriques à paroi traitée en présence d'un écoulement uniforme. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00539663

**HAL Id: hal-00539663**

**<https://hal.science/hal-00539663>**

Submitted on 24 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Opérateur DtN pour les guides cylindriques à paroi traitée en présence d'un écoulement uniforme

Boureima Ouédraogo<sup>1</sup>, Emmanuel Redon<sup>1</sup>, Jean-François Mercier<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université de Bourgogne - Drive, 9 Avenue Alain Savary 21000 Dijon, France, {Boureima.Ouedraogo,emredon}@u-bourgogne.fr

<sup>2</sup> POEMS (UMR 7231 CNRS-INRIA-ENSTA), 32 Boulevard Victor, 75 015 Paris, France, jean-francois.mercier@ensta.fr

On s'intéresse au problème de rayonnement acoustique d'une source dans une conduite cylindrique axisymétrique infinie dont la paroi est recouverte d'un matériau absorbant en présence d'un écoulement uniforme. Dans le but d'utiliser la méthode des éléments finis, le domaine infini doit être tronqué par une frontière artificielle sur laquelle une condition limite transparente est introduite. La méthode exposée dans ce travail consiste à écrire la condition transparente sous la forme d'un opérateur Dirichlet to Neumann (DtN) obtenu par la généralisation de travaux réalisés dans le cas d'un guide 2D infini. Cet opérateur est basé sur une décomposition modale qu'il est facile d'explicitier si le guide est rigide : le problème aux valeurs propres associé est alors auto-adjoint. En présence d'un matériau absorbant, modélisé par une impédance locale ( $Z \in \mathbb{C}$ ) sur la paroi, des difficultés apparaissent car le problème aux valeurs propres n'est plus auto-adjoint. Néanmoins, une relation de bi-orthogonalité existe et permet de définir l'opérateur DtN. Dans le cas plus général d'un guide traité en présence d'un écoulement uniforme, le problème aux valeurs propres est encore non auto-adjoint et il n'existe plus de relation de bi-orthogonalité exacte pour la pression seule. Toutefois, nous montrons qu'il est possible d'écrire une relation d'orthogonalité valide asymptotiquement qui permet d'exprimer une bonne approximation de l'opérateur DtN cherché. La méthode est présentée dans le cas académique d'un guide cylindrique axisymétrique rectiligne, mais elle s'étend à des configurations plus complexes à condition que la partie étudiée soit comprise entre deux tronçons de guide rectiligne dans lesquels l'écoulement est uniforme. En particulier, le cas d'un guide non rectiligne en présence d'un écoulement potentiel sera présenté comme illustration.

## 1 Introduction

Il existe de nombreux problèmes de physique pour lesquels le domaine d'étude n'est pas borné, c'est par exemple le cas pour les problèmes de rayonnement ou de diffraction en espace libre. D'autres problèmes, souvent rencontrés en acoustique, concernent la propagation d'ondes dans des guides infinis, c'est l'objet de notre étude. La principale difficulté de ces problèmes non bornés est liée au caractère infini du domaine qui est souvent incompatible avec l'utilisation des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis. Pour borner le domaine de calcul, une technique souvent utilisée consiste à définir des conditions aux limites transparentes sur une frontière artificielle. Cette méthode appelée ABC (Artificial Boundary Conditions) ou NRBC (Non-Reflecting Boundary Conditions), a été développée par des auteurs tels que Givoli [1], Harari [2] et Keller [3]. Harari *et al* [2] ont développé un opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) pour un guide d'onde traité non borné, mais les applications concernent uniquement le cas d'un guide rigide. L'étude que nous présentons concerne le rayonnement d'une source placée dans un guide cylindrique infini à parois absorbantes parcouru par un écoulement. Une précédente étude réalisée pour des problèmes plans [4] avait permis d'explicitier un opérateur DtN original pour des guides acoustiquement traités en écoulement uniforme. On

cherche ici à généraliser la méthode pour des problèmes 3D axisymétriques. On montre que l'opérateur est facile à déterminer pour un guide rigide, mais des difficultés apparaissent en présence d'un matériau absorbant car le problème n'est plus auto adjoint [4]. Comme dans le cas 2D, une relation de bi-orthogonalité existe pour un traitement acoustique seul, ce qui permet d'exprimer facilement l'opérateur DtN cherché. En revanche, en présence d'un matériau absorbant et d'un écoulement, il n'existe plus de relation de bi-orthogonalité pour la pression seule. Une relation d'orthogonalité asymptotique est alors introduite pour exprimer l'opérateur DtN. Des exemples permettent de vérifier l'efficacité de la méthode y compris pour des géométries non uniformes en présence d'un écoulement potentiel.

## 2 Définition du problème et équations générales

On considère un guide infini tridimensionnel cylindrique axisymétrique de rayon  $R$  contenant une source acoustique supposée fixe et un fluide en mouvement uniforme subsonique axisymétrique de vitesse  $\mathbf{v}_0$  suivant  $\mathbf{e}_z$ . Sa paroi extérieure  $\Gamma_Z$  ( $\mathbf{r} = R$ ) est recouverte d'un matériau absorbant caractérisé par une impédance  $Z$  ( $Z \in \mathbb{C}$ ). L'équation de propagation des ondes acoustiques en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est donnée

par :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 p'}{dt^2} = f \quad (1)$$

où  $p'$  désigne la pression acoustique,  $c$  la vitesse acoustique et  $f$  est une source à support compact. On note

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

la dérivée particulaire. En considérant un régime harmonique en temps, on cherche les solutions sous la forme :

$$p'(r, \theta, z) = p(r, z) \Theta(\theta) e^{-j\omega t} \quad (2)$$

En reportant (2) dans l'équation (1), on trouve en dehors des sources ( $f = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2i\omega \frac{v_0}{c^2} \frac{\partial p}{\partial z} \\ + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}\right) p = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

On déduit que le champ acoustique dans le guide n'est pas axisymétrique mais qu'il peut être cherché comme une fonction harmonique de la variable azimutale  $\theta$  :  $\Theta(\theta) = A e^{-jm\theta}$ , où  $m$  désigne l'ordre du mode angulaire. L'équation (3) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2ikM \frac{\partial p}{\partial z} \\ + (k^2 - \frac{m^2}{r^2}) p = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

avec  $k = \omega/c$  le nombre d'onde et  $M = v_0/c$  le nombre de Mach. La géométrie du guide et l'écoulement étant axisymétriques, l'étude sera réduite dans le plan  $Orz$  où l'axe  $z$  est parallèle à la paroi du guide. Afin d'utiliser la méthode des éléments finis il est nécessaire de travailler dans un domaine borné. On définit donc deux frontières artificielles ( $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$ ) sur lesquelles il convient d'imposer des conditions limites transparentes (voir Fig.1). Dans notre étude, ces conditions aux limites transparentes sont basées sur l'écriture d'un opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN), explicité à partir d'une décomposition modale de la pression acoustique sur la frontière.

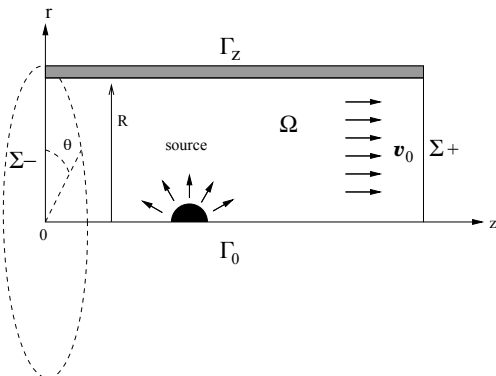


FIG. 1 – Géométrie du problème

L'opérateur DtN est défini par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T^\pm(p) \quad \text{sur} \quad \Sigma_\pm \quad (5)$$

Dans la suite on cherche à déterminer l'expression de l'opérateur DtN pour un guide recouvert d'un matériau absorbant en présence d'un écoulement uniforme.

La méthode est au préalable présentée pour les cas simples d'un guide sans écoulement avec ou sans absorbant.

### 3 Opérateur DtN pour un guide cylindrique rigide

En l'absence d'écoulement, en considérant une solution axisymétrique (ie.  $m = 0$ ), la propagation des ondes acoustiques est décrite par l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = f \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (6)$$

où on note  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  l'opérateur Laplacien en coordonnées cylindriques axisymétriques. Les conditions aux limites sur la frontière  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_z \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-$  s'écrivent :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_z \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T^\pm(p) \quad \text{sur} \quad \Sigma_\pm \quad (8)$$

où  $n$  désigne la normale extérieure,  $T^-(p)$  et  $T^+(p)$  sont les opérateurs DtN cherchés. Pour expliciter ces opérateurs sur les frontières  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$  on suppose que la pression peut se décomposer sur les modes transverses  $\varphi(r)$  du guide :

$$p(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(p) \varphi_n(r) e^{i\beta_n z} \quad (9)$$

où  $\beta_n$  désigne la constante de propagation suivant l'axe  $z$  et où les  $A_n(p)$  sont des coefficients modaux à déterminer. Une étape importante de la méthode consiste donc à calculer les modes du guide. En utilisant à nouveau la méthode de séparation des variables on cherche les modes sous la forme :

$$p(r, z) = \varphi(r) e^{i\beta z} \quad (10)$$

Les modes sont solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + (k^2 - \beta^2) \varphi &= 0 \quad r \in ]0, R[ \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0 \quad \text{pour } r = 0 \text{ et } r = R \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation de Bessel dont les solutions sont de la forme :  $\varphi_n(r) = a_n J_0(\alpha_n r)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) avec  $\alpha_n^2 = k^2 - \beta_n^2$  l'équation de dispersion et  $a_n$  est l'amplitude du mode d'ordre  $n$ . Les nombres d'ondes transversaux  $\alpha_n$  correspondent aux valeurs qui annulent la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre 0 en  $r = R$ , la fonction de Bessel d'ordre 0 vérifiant la condition limite au centre quelle que soit la valeur de  $\alpha_n$ .

Comme dans le cas cartésien, on obtient donc deux familles de modes [5] :

$$p_n^\pm(r, z) = \varphi_n^\pm(r) e^{i\beta_n^\pm z} \quad (11)$$

où les indices  $\pm$  correspondent au sens de propagation du mode. On déduit facilement la distinction entre les modes propagatifs ( $\beta_n^\pm \in \mathbb{R}$ ) et les modes évanescents ( $\beta_n^\pm \notin \mathbb{R}$ ). On note également que :  $\varphi_n^+(r) = \varphi_n^-(r) = \varphi_n(r)$  et  $\beta_n^+ = -\beta_n^-$ . Sur la figure ci-dessous (FIG. 2), les  $\beta_n$  purement réelles positives (respectivement négatives) représentent les modes propagatifs dans le sens des  $z$  croissants (respectivement décroissants) et celles purement imaginaires désignent les modes évanescents.

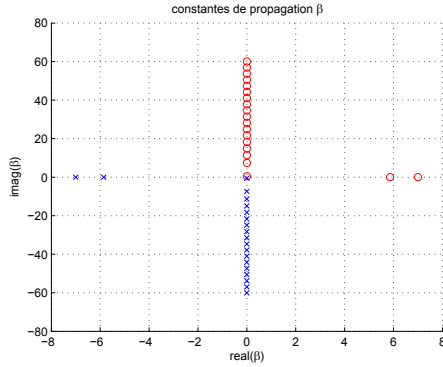


FIG. 2 – Constantes de propagation  $\beta_n$  pour un guide rigide sans écoulement pour  $k = 7$ .

Comme dans le cas rectangulaire [4], il est connu que le problème aux valeurs propres est auto-adjoint en l'absence d'absorbant. Les modes propres du guide sont donc orthogonaux au sens du produit scalaire sur  $L^2([0, R])$  :

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_0^R \varphi_n \bar{\varphi}_m r dr \quad (12)$$

où  $\bar{\varphi}$  représente le complexe conjugué de  $\varphi$ . On sait aussi que les modes forment une base complète qui justifie le développement (9). On peut alors calculer les amplitudes  $a_n$  des modes pour qu'ils forment une base orthonormée et on trouve :

$$\begin{aligned} \varphi_0(r) &= \sqrt{2}/R \\ \varphi_n(r) &= \frac{\sqrt{2}}{J_0(\alpha_n R) R} J_0(\alpha_n r) \quad , \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (13)$$

Les opérateurs DtN sur  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$  s'écrivent alors :

$$T^\pm(p) = \mp \sum_{n \geq 0} i\beta_n^\pm(p, \varphi_n)_{\Sigma_\pm} \varphi_n(r) \quad (14)$$

**Remarque :** Dans un guide cylindrique rigide en présence d'un écoulement uniforme, tous les résultats précédents restent valables sauf les constantes de propagation  $\beta_n$  qui tiennent compte maintenant de la convection par l'écoulement et que l'on détermine par la nouvelle relation de dispersion :

$$(1 - M^2)\beta_n^2 - 2kM\beta_n - (k^2 - \alpha_n^2) = 0$$

On retrouve un résultat similaire au cas rectangulaire [4] (voir FIG. ) :

$$\beta_n^\pm = \frac{-kM \pm \sqrt{k^2 - \alpha_n^2(1 - M^2)}}{1 - M^2}$$

## 4 Opérateur DtN pour un guide cylindrique recouvert d'un matériau absorbant

Si la paroi du cylindre est traitée avec un matériau absorbant caractérisé par une impédance  $Z$ , la condition limite sur cette paroi devient :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{ikp}{Z} \quad \text{sur} \quad \Gamma_Z$$

En appliquant la même démarche que précédemment, pour des solutions axisymétrique (ie.  $m = 0$ ), on montre que les modes sont encore de la forme :  $\varphi_n(r) = a_n J_0(\alpha_n r)$ , mais les nombres d'ondes transversaux  $\alpha_n$  sont maintenant les solutions d'une équation transcendante :

$$-\alpha_n \frac{J_1(\alpha_n R)}{J_0(\alpha_n R)} = \frac{ik}{Z} \quad (15)$$

La résolution de cette équation s'effectue par la méthode de Newton-Raphson dans laquelle les valeurs initiales sont déterminées par la méthode des éléments finis appliquée dans la section du guide.

L'équation de dispersion reste inchangée par rapport au cas rigide sans écoulement (cf. § 3), mais on peut voir l'influence de l'impédance sur les valeurs des  $\beta_n$  qui ont maintenant une partie imaginaire non nulle (FIG. 3), en effet les modes sont tous atténués par la présence de l'absorbant.

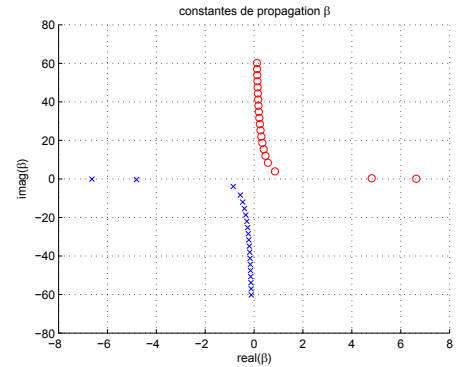


FIG. 3 – Constantes de propagation  $\beta_n$  pour un guide recouvert d'un matériau absorbant d'impédance  $Z = 0.5(1 - i)$  pour  $k = 7$ .

La présence du matériau absorbant introduit des difficultés supplémentaires puisqu'il est connu que le problème aux valeurs propres n'est plus auto-adjoint. Toutefois, des études [C. Hazard] ont montré que les modes forment une base complète et qu'une relation de bi-orthogonalité existe :

$$(\varphi_n, \varphi_m)^* = \int_0^R \varphi_n \varphi_m r dr \quad (16)$$

La normalisation des modes à partir de la relation (16) n'est pas possible que si :

$$J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R) = 0 \quad (17)$$

Les valeurs discrètes  $\alpha_n^c$  racines de l'équation (17) sont donc associées à des valeurs critiques de l'impédance

$Z_c^n$  qui avaient déjà été discutées dans le cas 2D. En dehors des valeurs critiques de l'impédance, les modes normalisés sont de la forme :

$$\varphi_n(r) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2}{J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)}} J_0(\alpha_n r), \quad n \geq 0 \quad (18)$$

L'opérateur DtN se déduit alors facilement :

$$T_Z^\pm(p) = \pm \sum_{n \geq 0} i\beta_n^\pm(p, \varphi_n)_{\Sigma_\pm}^* \varphi_n(y) \quad (19)$$

## 5 Opérateur DtN pour un guide cylindrique traité en présence d'un écoulement uniforme

Dans un guide rectiligne cylindrique recouvert d'un matériau absorbant en présence d'un écoulement uniforme ( $M = v_0/c$ ), le problème de rayonnement acoustique d'une source  $f$  dans le domaine  $\Omega$  est maintenant décrit par l'équation de Helmholtz convectée :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2ikM \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = f$$

En ne considérant que des solutions axisymétriques ( $m = 0$ ), la condition limite sur l'axe de symétrie ( $r = 0$ ) est encore définie par  $\partial p / \partial n = 0$ . La condition limite sur la paroi traitée ( $\Gamma_Z$ ) est maintenant décrite par la condition de Myers [8] :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{i}{kZ} (M \frac{\partial}{\partial z} - ik)^2 p \quad \text{sur } (\Gamma_Z) \quad (20)$$

Les conditions sur les frontières artificielles du domaine de calcul ( $\Sigma_\pm$ ) sont encore décrites par un opérateur DtN que nous allons expliciter :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T_{ZM}^\pm(p) \quad (\Sigma_\pm) \quad (21)$$

On note l'apparition de dérivées tangentielles de la pression au niveau de la paroi traitée (20). Ces termes sont à l'origine de difficultés supplémentaires déjà rencontrées dans [4]. En effet, la présence d'un matériau absorbant et d'un écoulement uniforme conduit à nouveau à un problème aux valeurs propres non auto-adjoint et il n'existe plus de relation d'orthogonalité pour la pression seule.

Pour déterminer les opérateurs DtN  $T_{ZM}^\pm(p)$  on cherche encore les modes sous la forme :

$$p_n(r, z) = a_n J_0(\alpha_n r) e^{i\beta_n z} \quad (22)$$

On déduit la relation de dispersion :

$$\alpha_n^2 = k^2 - (1 - M^2)\beta_n^2 - 2kM\beta_n \quad (23)$$

où  $\alpha_n$  est maintenant solution d'une équation transcendante qui dépend de  $\beta_n$  :

$$-\alpha_n \frac{J_1(\alpha_n R)}{J_0(\alpha_n R)} = \frac{i(\beta_n^2 + \alpha_n^2)}{kZ} \quad (24)$$

Les  $\alpha_n$  et les  $\beta_n$  sont encore cherchés numériquement par la méthode de Newton-Raphson. Un exemple de constantes de propagation obtenues pour  $k = 7$ ,  $Z = 3.5(1 + i)$  et  $M = 0.3$  est représenté sur la figure (4).

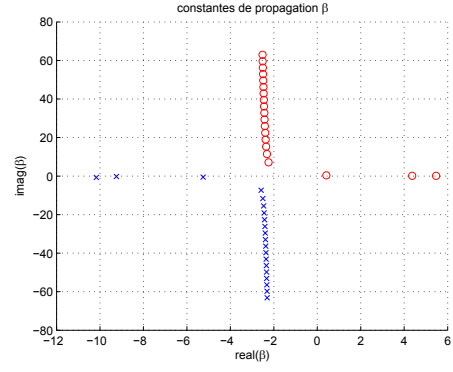


FIG. 4 – Constantes de propagation  $\beta_n$  pour un guide recouvert d'un matériau absorbant d'impédance  $Z = 3.5(1 + i)$ , en présence d'un écoulement uniforme  $M = 0.3$ , pour  $k = 7$ .

Les solutions sont séparées en deux familles suivant le signe de la partie imaginaire de  $\beta_n$ . Ainsi, les couples  $\alpha_n, \beta_n$  solutions de (23) et (24) sont des modes qui se propagent vers l'aval (respectivement vers l'amont) quand  $\text{Im}(\beta_n) > 0$  (resp.  $\text{Im}(\beta_n) < 0$ ), ils sont alors notés :  $\alpha_n^+, \beta_n^+$  (resp.  $\alpha_n^-, \beta_n^-$ ) avec cette fois  $\beta_n^+ \neq -\beta_n^-$  sous l'effet de l'écoulement.

Afin de déterminer les coefficients modaux  $A_n$  qui permettent d'exprimer l'opérateur DtN, on introduit une nouvelle relation bilinéaire définissant un pseudo-produit scalaire pour lequel les modes du guide deviennent asymptotiquement orthogonaux :

$$((\varphi_n, \varphi_m)) = \int_0^R \varphi_n \varphi_m r dr - \frac{i M^2 R}{kZ(1 - M^2)} \varphi_n(R) \varphi_m(R) \quad (25)$$

On note que cette relation diffère de la relation de bi-orthogonalité obtenue pour le cas sans écoulement (cf. equation (16) §4) par la présence d'un terme supplémentaire qu'il faut estimer sur la paroi absorbante ( $r = R$ ).

On déduit alors l'expression de l'opérateur DtN :

$$T_{ZM}^\pm(p) = \mp \sum_{n,m \geq 0} i\beta_n^\pm [O^\pm]_{nm}^{-1} ((p, \varphi_m^\pm))_{\Sigma_\pm} \varphi_n^\pm(r) \quad (26)$$

où  $((\varphi_n^\pm, \varphi_m^\pm))_{\Sigma_\pm} = O_{nm}^\pm$  une matrice spectrale qui tend à devenir diagonale.

## 6 Guide cylindrique non uniforme en présence d'un écoulement potentiel

Les systèmes industriels tels que les échappements d'automobile, les turboréacteurs ou les systèmes de ventilation ne se réduisent pas à des guides rectilignes, mais ils peuvent souvent être décomposés en des systèmes élémentaires insérés entre deux guides de section uniforme. Dans ces conditions, notre méthode est encore applicable sous réserve de connaître le champ de vitesse dans la partie non uniforme.



Comme dans le cas précédent, on suppose que la frontière est recouverte d'un matériau absorbant, la condition limite associée est encore la condition de Myers [8]. Cette condition requiert la connaissance des dérivées normale et tangentielle des composantes normale et tangentielle respectives de la vitesse moyenne ainsi que les dérivées spatiales de la masse volumique moyenne le long de la paroi. Dans le cas d'un guide non uniforme à paroi traitée, ces termes sont difficiles à expliciter. Eversmann et Okunbor [9] ont appliqué la condition de Myers en négligeant les dérivées normales et en utilisant une approximation pour les dérivées tangentielles. Cette méthode n'est valable que pour les géométries à section lentement variable. Eversmann [10] utilise le théorème de Stokes pour s'affranchir du calcul de ces termes dans le cas d'un guide partiellement traité.

Pour notre étude, cette difficulté sera levée en considérant un guide non traité dans sa partie non uniforme. On s'intéresse donc au rayonnement d'une source placée dans un cylindre infini non uniforme traversé par un écoulement potentiel. La géométrie étudiée est constituée d'une partie non uniforme à paroi rigide comprise entre deux guides infinis uniformes de rayon  $R$  et recouverts d'un matériau absorbant (Fig 5). Dans la partie rectiligne du guide, l'écoulement étant uniforme, il est donc possible d'utiliser les opérateurs DtN déterminés précédemment pour tronquer le domaine d'étude.

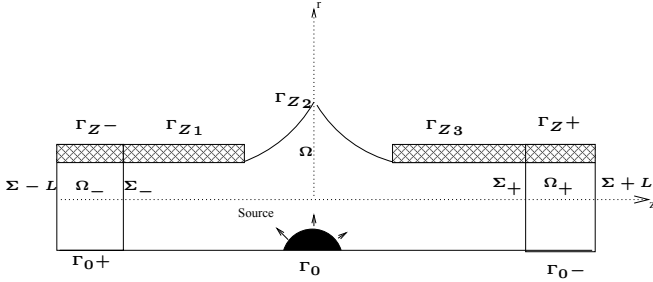


FIG. 5 – Schema de principe

On étudie une configuration où l'écoulement moyen est supposé potentiel, les perturbations acoustiques sont le sont donc également et le potentiel acoustique  $\phi$  associé vérifie l'équation :

$$\text{div}(\rho_0 \nabla \phi) - \rho_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c_0^2} \frac{d\phi}{dt} \right) = f \text{ dans } \Omega \quad (27)$$

où  $\frac{d\phi}{dt} = -ik\phi + Mv_0 \nabla \phi$  désigne la dérivée particulaire. La figure ci-dessous (FIG 6) montre l'allure des lignes de courant  $\psi_0$  de l'écoulement moyen calculée numériquement :

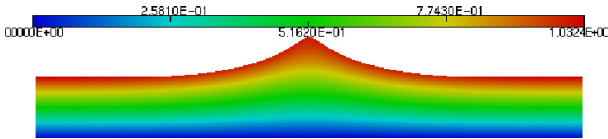


FIG. 6 – Fonction de courant  $\psi_0$

Les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 & \text{sur} & \Gamma_0 \cup \Gamma_{Z2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= -T_{ZM}^{\pm}(\phi) & \text{sur} & \Sigma_{\pm} \end{aligned}$$

Celle sur les parois  $\Gamma_{Z1}$  et  $\Gamma_{Z3}$  sont les conditions de Myers :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{Y}{ik} \left( (-ik + Mv_{0z} \frac{\partial}{\partial z} - M \frac{\partial v_{0r}}{\partial r}) \rho_0 \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (28)$$

où  $Y = 1/Z$  est l'admittance acoustique adimensionnelle de paroi et on a posé les grandeurs adimensionnelles suivantes :  $M = \frac{v_{\infty}}{c_{\infty}}$  le nombre de Mach à l'infini,  $k = \frac{\omega}{c_{\infty}}$  avec  $c_{\infty}$  la vitesse acoustique à l'infini,  $v_0 = \frac{\nabla \phi_0}{v_{\infty}}$  avec  $v_{\infty}$  la vitesse d'écoulement à l'infini,  $v_{0r} = \frac{\partial \phi_0}{\partial r}$  la vitesse radiale,  $v_{0z} = \frac{\partial \phi_0}{\partial z}$  la vitesse axiale,  $\rho_0 = 1 + \frac{M^2}{2} (1 - |v_0^2|)$   $c_0^2 = \rho_0^{\gamma-1}$  où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants.

## 7 Exemples d'application

Afin de valider la méthode utilisée dans ce travail, des résultats numériques sont présentés pour des guides traités en présence ou non d'un écoulement uniforme. La généralisation au cas d'un guide non rectiligne traité en présence ou non d'un écoulement potentiel sera également abordé. Ne disposant pas de solutions analytiques, les solutions obtenues avec les opérateurs DtN sont comparées à des solutions obtenues grâce à l'utilisation de couches PML (Perfectly Matched Layers) [11] comme conditions transparentes. Les simulations sont réalisées avec la bibliothèque MELINA [12] .

### 7.1 Guide cylindrique uniforme

On considère la propagation acoustique dans un guide cylindrique infini avec une source ( $f = 1$ ) monopolaire circulaire (demi-sphère) placée au centre du domaine de calcul pour  $k = 7$ . Les frontières artificielles  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$  sont placées à  $z = 0$  et  $z = 2$  respectivement. Quant aux couches PML, elles ont une épaisseur  $e = 0.4$ . La figure (FIG. 7) présente les résultats obtenus pour une impédance  $Z = 0.5(1 - i)$  en l'absence d'écoulement tandis que la figure (FIG. 8) montre l'influence d'un écoulement uniforme  $M = 0.3$ . Sans écoulement, il y a une répartition symétrique de la pression par rapport à la source contrairement au cas avec écoulement. Dans les deux cas la différence entre les deux méthodes est de l'ordre de 1 %.

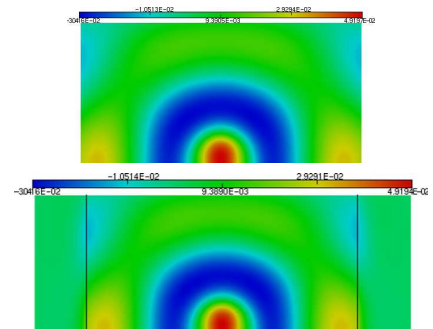


FIG. 7 – Partie réelle de la pression acoustique, DtN (en haut), PML (en bas),  $M = 0$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$ ,  $k = 7$ ,  $\nu = 0.22(1 - i)$

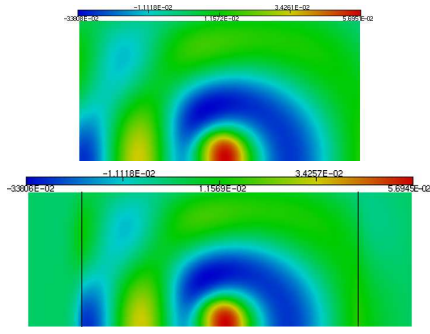


FIG. 8 – Partie réelle de la pression acoustique, DtN (en haut), PML (en bas),  $M = 0.3$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$ ,  $k = 7$ ,  $\nu = 0.28(1 - i)$

## 7.2 Guide cylindrique non uniforme : écoulement potentiel

Comme précédemment, les solutions numériques trouvées avec les opérateurs DtN seront comparées avec les solutions provenant de l'utilisation des couches PML d'épaisseur  $e = 0.5$ .  $\Sigma_-$  est placée à  $z = -4.5$  et  $\Sigma_+$  à  $z = 4.5$ . La source ( $f = 1$ ) est encore monopolaire circulaire et placée comme l'indique la figure (FIG. 5).

Les figures ci-dessous nous montrent la répartition de la pression dans le guide et l'atténuation due à l'impédance ( $Z = 0.5(1 - i)$ ) en l'absence d'écoulement (FIG. 9). En présence d'écoulement, en plus de l'atténuation, il y a l'effet de la convection (FIG. 10).

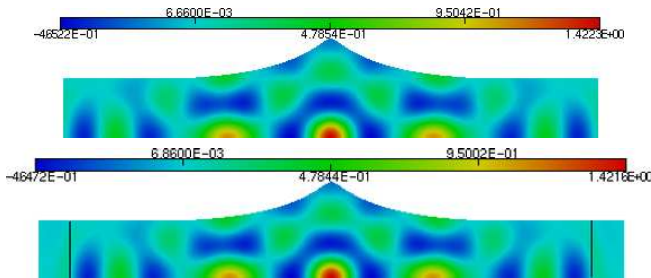


FIG. 9 – Partie réelle de la pression acoustique, DtN (en haut), PML (en bas),  $M = 0$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$ ,  $k = 7$ ,  $\nu = 0.38(1 - i)$

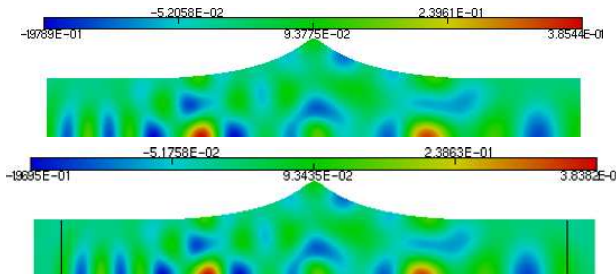


FIG. 10 – Partie réelle de la pression acoustique, DtN (en haut), PML (en bas),  $M = 0.3$ ,  $Z = 0.5(1 - i)$ ,  $k = 7$ ,  $\nu = 0.65(1 - i)$

## 8 Conclusions

La détermination numérique des modes dans un guide cylindrique axisymétrique avec une paroi ab-

sorbante en présence ou non d'un écoulement uniforme nous a permis d'écrire de nouvelles conditions limites transparentes basées sur les opérateurs DtN. Ces opérateurs sont faciles à mettre en œuvre dans un guide à paroi rigide, mais deviennent complexes pour des guides traités. Dans le cas d'un guide traité sans écoulement, les modes ne sont plus orthogonaux au sens du produit scalaire usuel mais, il existe une relation de bi-orthogonalité qui permet d'explicitier les opérateurs DtN. En présence d'un écoulement uniforme, les modes ne sont toujours pas orthogonaux mais, il est encore possible d'introduire un nouveau produit scalaire incluant les valeurs de la pression sur la paroi traitée. L'opérateur DtN peut alors être calculé moyennant le calcul d'une matrice spectrale qui devient diagonale quand l'ordre des modes augmente. La méthode développée dans cette étude a également été appliquée pour un guide non uniforme traversé par un écoulement potentiel et dont seules les parties uniformes du guide étaient traitées. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux obtenus avec des couches PML.

## Références

- [1] D. Givoli High-order local non-reflecting boundary conditions : a review *Wave Motion, Volume 39, Issue 4, April 2004, Pages 319-326*
- [2] I. Harari , I. Patlashenko , D. Givoli, Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded wave guides *Journal of Computational Physics, v.143 n.1, p.200-223, June 10, 1998 [doi 10.1006/jcph.1998.5960]*
- [3] J. B. Keller, Artificial boundary conditions for axisymmetric slow viscous flow, *Journal of Computational Physics, Volume 204, Issue 2, 10 April 2005, Pages 399-403*
- [4] E. Redon , B. Ouedraogo , A.-S. Bonnet-Ben Dhia , J.-F. Mercier and C. Chambeyron Transparent boundary condition for acoustic propagation in lined guide with mean flow, *Acoustics'08 Paris, Juillet 2008*
- [5] M. Bruneau, 1998, Manuel d'Acoustique Fondamentale, Hermes
- [6] C. Hazard, M. Lenoir, 1993 Determination of scattering frequencies for an elastic floating body. *SIAM J. Math. Anal.* 24 (4), 1458-1514.
- [7] S. Poernomo Sari, Propagation acoustique dans les conduits à parois traitées en présence d'un écoulement : modélisation par la méthode des éléments finis *Thèse de doctorat de l'Université de Bourgogne, 2008*
- [8] K. Myers, 1980, On the acoustic boundary condition in the presence of flow *Journal of Sound and vibration* 71, 429-434.
- [9] W. Eversman and D. Okunbor, 1998 Aft fan duct acoustic radiation. *Journal of Sound and vibration* 213, 235-257.
- [10] W. Eversman, 2000, The boundary condition at an impedance wall in a non-uniform duct with potential flow., *Journal of Sound and Vibration* 246, 63-69.
- [11] E. Bécache, A.S. Bonnet-Ben Dhia and G. Legendre, 2004, Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation, *SIAM J. on Numerical Analysis*, **Volume 42** (1), 409-433
- [12] D. Martin Librairie Mélina : <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/>